

4

DROITES ET CERCLES

Les calculs d'intersection en topographie sont généralement appelés des techniques nouvelles par rapport aux méthodes classiques apprises en mathématiques. En fait, les topographes ont adapté les calculs aux données dont ils disposent sur le terrain pour arriver rapidement et précisément au résultat. Il faut donc se familiariser avec ces méthodes de calcul faisant intervenir gisements et distances plutôt qu'équations de droites ou de cercles...

1 INTERSECTION DE DEUX DROITES

1.1 Intersection par résolution de triangle

Les droites sont le plus souvent connues par un point et un gisement (voir sur la figure 4.1. les deux droites AM et BN).

Connaissant les coordonnées des deux points A et B, on calcule le gisement G_{AB} et la distance horizontale D_{AB} .

On en déduit les angles :

$$IAB = G_{AB} - G_{AM}$$

$$IBA = G_{BN} - G_{BA}$$

Il reste à résoudre le triangle IAB dont un côté et deux angles adjacents sont connus ; on calcule par exemple la longueur du côté AI et on déduit les coordonnées de I de celles de A.

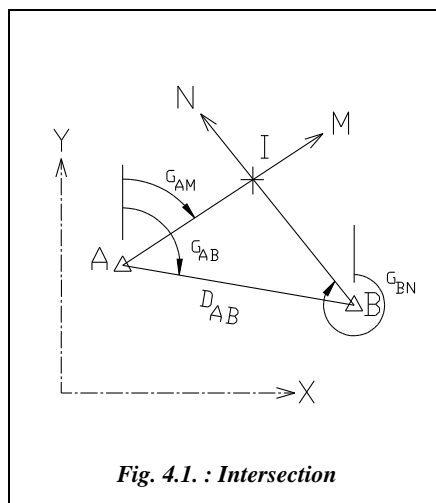


Fig. 4.1. : Intersection

On peut ainsi vérifier les calculs à partir de B.

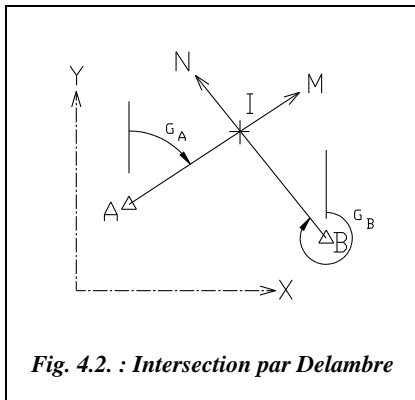
Exemple

Calculez les coordonnées du point d'intersection I des droites D_1 et D_2 :

- D_1 passant par A (12,36 ; 15,62) a un gisement de 48,364 gon.
- D_2 passant par B (98,74 ; 6,56) a un gisement de 145,647 gon.

Il est nécessaire de faire un schéma avant de commencer les calculs. La réponse est donnée au paragraphe 1.4.

1.2 Formules de Delambre



C'est la méthode la plus couramment employée par les topographes ; elle utilise deux formules donnant directement les coordonnées du point d'intersection à partir des données suivantes :

- coordonnées du point A (X_A ; Y_A) et du point B (X_B ; Y_B) ;
- gisements G_{AM} et G_{BN} notés G_A et G_B .

Les coordonnées du point d'intersection I sont :

$$Y = Y_A + \frac{(X_A - X_B) - (Y_A - Y_B) \tan G_B}{\tan G_B - \tan G_A}$$

$$X = X_A + (Y - Y_A) \tan G_A$$

Attention : on calcule d'abord l'ordonnée Y que l'on reporte dans l'abscisse X .

On peut aussi trouver pour l'ordonnée Y les formulations suivantes :

- par inversion de A et B : $Y = Y_B + \frac{(X_B - X_A) - (Y_B - Y_A) \tan G_A}{\tan G_A - \tan G_B}$
- par changement de signe : $Y = Y_A + \frac{(X_B - X_A) - (Y_B - Y_A) \tan G_B}{\tan G_A - \tan G_B}$

Remarques

Puisque $\tan G = \tan(200 + G)$, on peut donner les gisements des droites à 200 gon près.

La formule ne donne pas de résultat dans les cas suivants :

- Si G_A ou G_B sont égaux à 100 gon ou 300 gon ; la fonction tangente est alors non définie (voir application).

- Évidemment, si les deux droites sont parallèles, $\tan G_A = \tan G_B$ donc le dénominateur de Y ne peut être calculé.
- Le calcul de G_A ou G_B est inutile, seul celui de $\tan G_A$ et $\tan G_B$ est nécessaire.

La **démonstration** de la formule de Delambre pour l'intersection est détaillée ci-après.

$$\tan G_A = \frac{X - X_A}{Y - Y_A} \quad \text{et} \quad \tan G_B = \frac{X - X_B}{Y - Y_B}; \quad \text{on en déduit que :}$$

$$\left. \begin{array}{l} X - X_A = (Y - Y_A) \tan G_A \quad (1) \\ X - X_B = (Y - Y_B) \tan G_B \quad (2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} X_A - X_B = (Y - Y_B) \tan G_B - (Y - Y_A) \tan G_A \end{array}$$

$$X_A - X_B = Y(\tan G_B - \tan G_A) - Y_B \tan G_B + Y_A \tan G_A$$

$$X_A - X_B = (Y - Y_A)(\tan G_B - \tan G_A) + (Y_A - Y_B) \tan G_B \quad (3)$$

L'équation (3) donne la valeur Y et l'équation (1) la valeur X .

Applications

- 1- Reprenez les données de l'exemple précédent (§ 1.1.) et vérifiez que vous retrouvez le même point d'intersection.
- 2- Trouvez la formule à appliquer dans le cas où $G_A = 100$ ou 300 gon.
- 3- Donnez une expression de l'abscisse X indépendante de l'ordonnée Y .

Réponses

2- $Y = Y_A$ et $X = X_B + (Y - Y_B) \tan G_B$.

3- À partir des équations (1) et (2) ci-dessus, on peut écrire :

$$Y_B - Y_A = (X - X_A) \cotan G_A - (X - X_B) \cotan G_B.$$

$$\text{On en tire l'expression suivante : } X = X_A + \frac{Y_A - Y_B - (X_A - X_B) \cotan G_B}{\cotan G_B - \cotan G_A}$$

Une résolution graphique est effectuée au paragraphe 1.4.

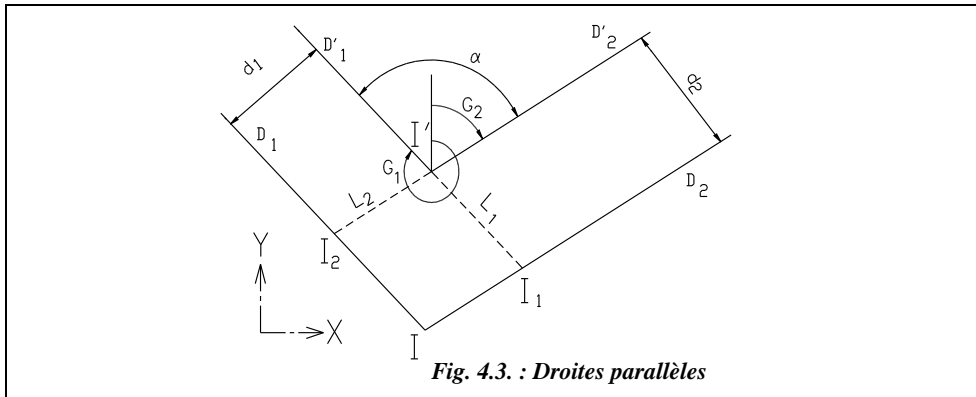
1.3 Droites parallèles

Il est fréquent d'avoir besoin de calculer à partir du point I d'intersection de deux droites (D_1) et (D_2) (fig. 4.3.) les coordonnées du point d'intersection I' de deux droites (D'_1) et (D'_2) parallèles ; on rencontre ce cas dans les calculs d'alignements, par exemple.

On peut calculer les coordonnées des points I_1 et I_2 par rayonnement à partir de celles de I :

$$\begin{aligned} X_{I1} &= X_I + L_2 \cdot \sin G_2 \\ Y_{I1} &= Y_I + L_2 \cdot \cos G_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{I2} &= X_I + L_1 \cdot \sin G_1 \\ Y_{I2} &= Y_I + L_1 \cdot \cos G_1 \end{aligned}$$



On peut jouer sur les signes de L_1 et L_2 pour obtenir différentes solutions possibles pour le point I' : si L_1 et L_2 sont négatifs, le point I' est « extérieur » à l'angle α et si L_1 et L_2 sont positifs, I' est « intérieur », comme dans le cas de la figure 4.3.

On en déduit ensuite les coordonnées du point I' par intersection des droites (D'_1) et (D'_2) à l'aide des formules de Delambre ; ces droites passent par les points I_1 et I_2 et ont pour gisement respectif G_1 et G_2 . On obtient :

$$X_{I'} = X_I + L_2 \cdot \sin G_2 + L_1 \cdot \sin G_1 \text{ avec } L_1 = d_2 / \sin(200 - \alpha) = d_2 / \sin \alpha ;$$

$$Y_{I'} = Y_I + L_2 \cdot \cos G_2 + L_1 \cdot \cos G_1 \text{ avec } L_2 = d_1 / \sin(200 - \alpha) = d_1 / \sin \alpha.$$

Finalement :

$$\begin{aligned} X_{I'} &= X_I + \frac{d_1 \sin G_2}{\sin \alpha} + \frac{d_2 \sin G_1}{\sin \alpha} \\ Y_{I'} &= Y_I + \frac{d_1 \cos G_2}{\sin \alpha} + \frac{d_2 \cos G_1}{\sin \alpha} \end{aligned}$$

Remarques

- | L'angle α est toujours choisi inférieur à 200 gon afin que son sinus reste positif.
- | Les considérations de signes faites pour les distances L_1 et L_2 s'appliquent à d_1 et d_2 .

Application

Soit le point I de coordonnées I (2 819,794 ; 2 691,548). Soit les droites (D_1) de gisement $G_1 = 153,4427$ gon et (D_2) de gisement $G_2 = 260,5387$ gon. Calculez les coordonnées du point I' , point de rencontre des parallèles aux droites (D_1) et (D_2) décalées vers l'extérieur, respectivement à $d_1 = 35$ m et $d_2 = 45$ m.

Réponse

En appliquant la formule démontrée précédemment : $\alpha = 107,0960$ gon ; I' se trouvant à « l'extérieur », on prend d_1 et d_2 négatifs. Donc les coordonnées de I' sont :
 $X = 2\,818,219$ m et $Y = 2\,745,709$ m.

Si on prend d_1 et d_2 positifs, on trouve le symétrique de I' par rapport à I :
I'' (2 821,368 m ; 2 637,386 m) .

Si on prend d_1 négatif et d_2 positif, on trouve : I''' (2 878,701 m ; 2 678,304 m).

Si on prend d_2 négatif et d_1 positif, on trouve : I'''' (2 760,886 m ; 2 704,791 m).

Une résolution graphique est proposée au paragraphe suivant.

1.4 Résolution graphique



Résolution des applications précédentes sur AutoCAD LT.

Environnement de travail : menu *FORMAT* / *CONTROLE DES UNITES*, angles en grades, sens horaire, zéro au nord.

1- Intersection de deux droites

Tracé du segment AM : *LIGNE* du point 12.36,15.62 au point @100<48.364

Tracé du segment BN : *LIGNE* du point 98.74,6.56 au point @100<345.647

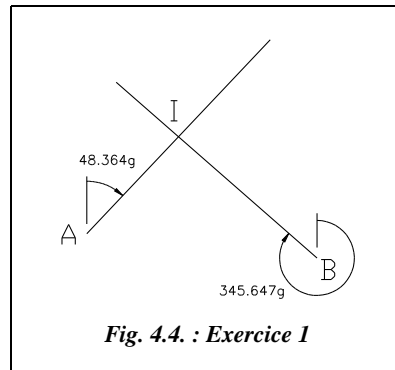


Fig. 4.4. : Exercice 1

Coordonnées du point d'intersection : commande *IDentité* *INTER*section de...

Résultat : I (46.78, 51.86).

2- Parallèles à deux droites

Construction des droites (D_1) et (D_2) : *LIGNE* du point 2819.794,2691.548 au point @100<153.4427
LIGNE du point *EXTrémité* de... (point I) au point @100<260.5387

Construction de I' : *DECALER* par 35 la droite D_1 vers le haut. *DECALER* par 45 la droite D_2 vers le haut. *CHNFREIN* entre les deux droites décalées. *ID* *INTER*section de... pour obtenir les coordonnées de I'.

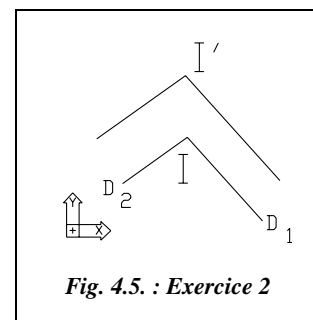
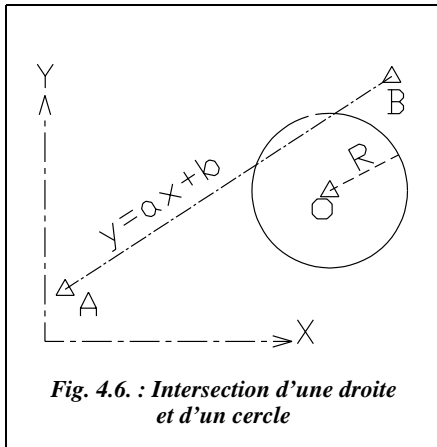


Fig. 4.5. : Exercice 2

En changeant les sens de décalage, on trouve très rapidement les autres solutions possibles.

2 INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UN CERCLE

2.1 À partir des équations



Cette méthode est rarement utilisée par les topographes.

L'équation d'un cercle de centre O (X_o ; Y_o) et de rayon R est :

$$(X - X_o)^2 + (Y - Y_o)^2 = R^2$$

L'équation d'une droite est du type :

$$Y = a.X + b$$

Il suffit dès lors de remplacer la valeur Y dans l'équation du cercle par $(a.X + b)$ et de résoudre l'équation du second degré qui en résulte. Suivant le cas, on obtient :

- si le discriminant est positif, il y a deux solutions : la droite coupe le cercle ;
- si le discriminant est nul, il y a une seule solution : la droite est tangente au cercle ;
- si le discriminant est négatif, il n'y a aucune solution : la droite ne coupe pas le cercle.

Cette méthode peut être étendue aux intersections faisant intervenir :

- des paraboles d'équation $Y = a.X^2 + b.X + c$;
- des ellipses d'équation $X^2/a^2 + Y^2/b^2 = 1$;
- des hyperboles d'équation $Y = a/X$.

2.2 Méthode usuelle en topographie

Une droite est généralement donnée par un point A (X_A ; Y_A) et un gisement G_A (fig. 4.7.). Un cercle est donné par son centre O (X_o ; Y_o) et son rayon R . M_1 et M_2 sont calculés à partir de A ; pour cela, il faut déterminer les distances AM_1 et AM_2 (G_A étant donné).

On calcule G_{AO} et D_{AO} à partir des coordonnées pour en déduire l'angle au sommet en A : $\alpha = G_{AO} - G_A$.

On en déduit : $AH = AO \cos \alpha$
 $OH = AO \sin \alpha$

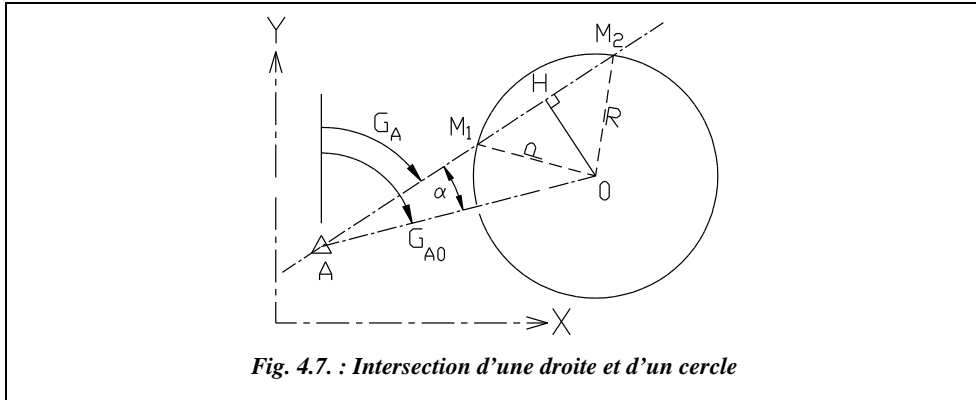


Fig. 4.7. : Intersection d'une droite et d'un cercle

Si $R > OH$, alors :

$$HM_2 = HM_1 = \sqrt{R^2 - OH^2} = \sqrt{R^2 - (AO \cdot \sin \alpha)^2}$$

Comme $AM_1 = AH - HM_1$

et $AM_2 = AH + HM_2$

On obtient :

$$\begin{cases} AM_1 = AO \cos \alpha - \sqrt{R^2 - (AO \cdot \sin \alpha)^2} \\ AM_2 = AO \cos \alpha + \sqrt{R^2 - (AO \cdot \sin \alpha)^2} \end{cases}$$

Les coordonnées de M_1 et M_2 sont ensuite déduites de A :

$M_1 \quad \begin{cases} X_{M1} = X_A + AM_1 \cdot \sin G_A \\ Y_{M1} = Y_A + AM_1 \cdot \cos G_A \end{cases}$	$M_2 \quad \begin{cases} X_{M2} = X_A + AM_2 \cdot \sin G_A \\ Y_{M2} = Y_A + AM_2 \cdot \cos G_A \end{cases}$
--	--

Remarque

Pour le contrôle des calculs, on vérifie que $OM_1 = OM_2 = R$;

- si $OH = R$, alors le cercle est tangent à la droite $M_1 = M_2$;
- si $OH > R$, alors la droite ne coupe pas le cercle ;
- si $OH < R$, alors on obtient deux points d'intersection M_1 et M_2 .

Application

Le premier exercice du paragraphe 3.1. constitue une application du précédent calcul.

3 DROITES DÉFINIES PAR DES POINTS DE TANGENCE

3.1 Droite tangente à un cercle

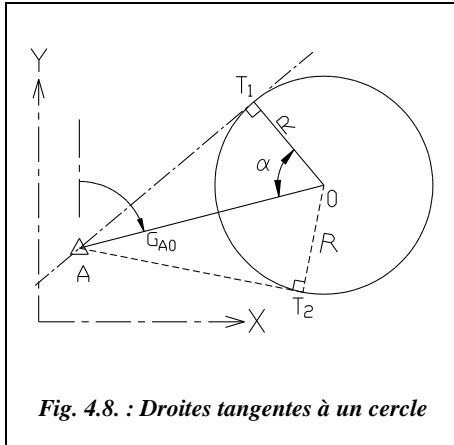


Fig. 4.8. : Droites tangentes à un cercle

On cherche les droites passant par A et tangentes à un cercle donné (fig. 4.8.). Les données sont A, O et R.

On détermine les coordonnées des deux points de tangence possibles, T₁ et T₂. Le point A est extérieur au cercle ($D_{AO} > R$). Le plus simple est de calculer ces deux points à partir de O.

A et O connus, on calcule D_{OA} et G_{OA} .

On calcule l'angle α comme suit :

$$\cos \alpha = \frac{R}{D_{OA}}$$

Alors : $G_{OT_1} = G_{OA} + \alpha$ et $G_{OT_2} = G_{OA} - \alpha$.

La distance AT_1 est calculée par $AT_1 = R \cdot \tan \alpha$.

Finalement :

$\begin{array}{l} T_1 \left \begin{array}{l} X_O + R \cdot \tan \alpha \cdot \sin(G_{OA} + \alpha) \\ Y_O + R \cdot \tan \alpha \cdot \cos(G_{OA} + \alpha) \end{array} \right. \end{array}$	$T_2 \left \begin{array}{l} X_O + R \cdot \tan \alpha \cdot \sin(G_{OA} - \alpha) \\ Y_O + R \cdot \tan \alpha \cdot \cos(G_{OA} - \alpha) \end{array} \right. \end{array}$
---	--

On contrôle les calculs en vérifiant que $OT_1 = OT_2 = R$.

Application 1

On projette d'implanter une rue circulaire (fig. 4.9.) d'une largeur de 12 m et dont les coordonnées du centre sont C (423,25 ; 502,40).

L'axe de la nouvelle rue est tangent en T à l'axe de la ruelle existante de 5 m de largeur, rectiligne et définie par A (290,00 ; 510,22) et $G_{AB} = 25,330$ gon.

Calculez les coordonnées des points P1, P2, P3, P4, P5 et P6 qui permettront d'implanter la rue circulaire. Vous déterminerez également le rayon R du cercle constituant l'axe de la rue circulaire.

Résolution graphique



L'environnement de travail est celui du paragraphe 1.4.

- Tracé de la ruelle existante : **LIGNE** du point 290,510.22 au point @100<25.33 puis **DECALER** par 2.5 la droite précédente de part et d'autre.
- Construction du cercle de centre C et tangent à l'axe de la ruelle existante : **CERCLE** de centre 423.25,502.4 de rayon *Tangent* à l'axe de la ruelle.
- Construction de la nouvelle rue circulaire : **DECALER** par 6 le cercle précédent de part et d'autre. Pour obtenir le point P5, prolongez la droite jusqu'au cercle avec la commande **PROLONGE**, seuil : le cercle, objet à prolonger : la droite.
- Lisez les coordonnées des points P1 à P6 ; placez vous en mode d'accrochage permanent : menu **OPTIONS / ACCROCHAGE AUX OBJETS...** puis cliquez sur l'option **INTERSECTION**, puis commande **ID**.

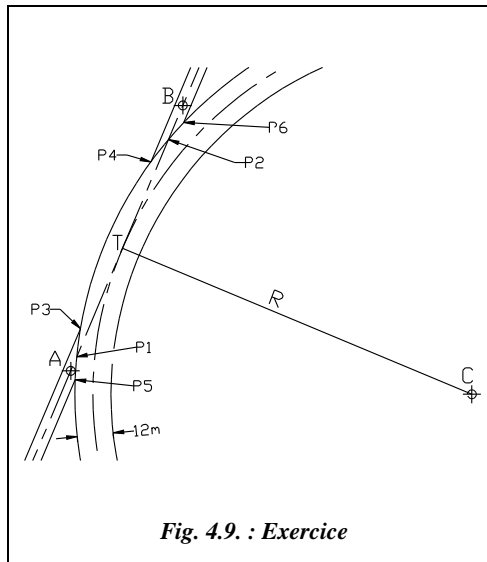


Fig. 4.9. : Exercice

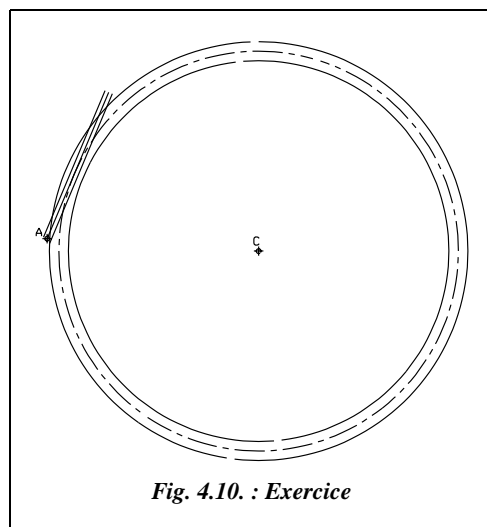


Fig. 4.10. : Exercice

Résultats

P1 (291.97 , 514.92) m
P2 (322.45 , 587.42) m
P3 (293.21 , 524.32) m
P4 (316.60 , 579.96) m
P5 (291.47 , 507.26) m
P6 (327.56 , 593.14) m
R =125.87 m

Application 2

Trouvez les points de tangence T_1 et T_2 pour les données suivantes : A (125,32 ; 142,33), O (110,13 ; 95,64), $R = 15,00$ m.



Résolution graphique

AutoCAD LT

Tracé du cercle : **CERCLE** de centre $110.13, 95.64$ et de rayon 15

Tracé des tangentes : **LIGNE** du point $125.32, 142.33$ au point **TANgent** au cercle vers la gauche du cercle. **LIGNE** du point **EXTrémité** de... (point A) au point **TANgent** au cercle vers la droite.

Coordonnées des points avec la commande **ID** **INTERsection** de... ou **EXTrémité** de...

Résultats

$T_1 (97.97, 104.42)$ et $T_2 (125.13, 95.58)$

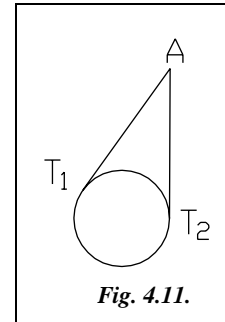


Fig. 4.11.

3.2 Droites tangentes à deux cercles

Nous allons distinguer deux cas suivant que les tangentes soient intérieures ou extérieures.

3.2.1 Tangentes intérieures

On cherche les deux tangentes intérieures communes à deux cercles donnés (fig. 4.12.).

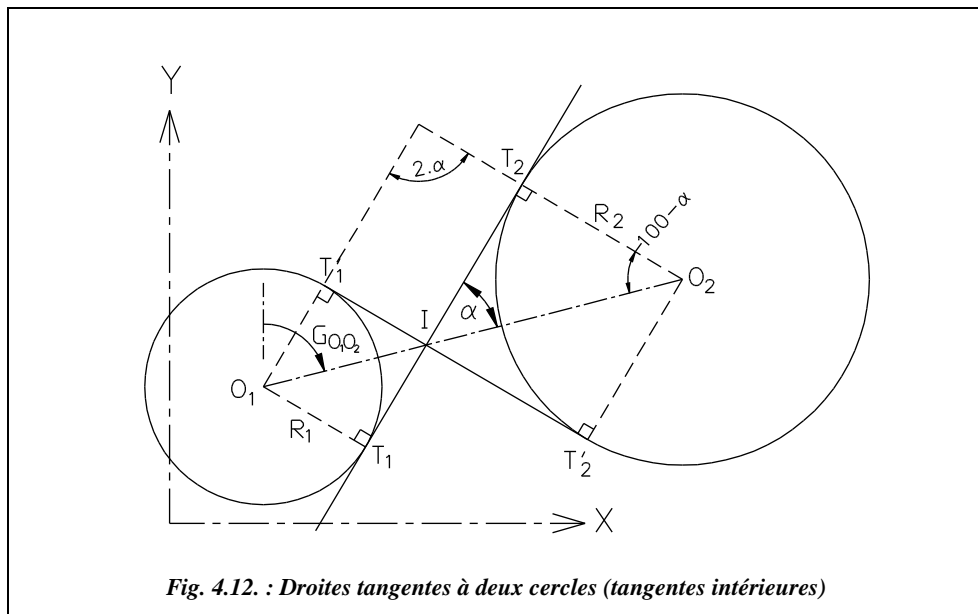


Fig. 4.12. : Droites tangentes à deux cercles (tangentes intérieures)

Les données sont O_1 , O_2 , R_1 et R_2 .

Pour que les tangentes existent, il faut que $(O_1 O_2 > R_1 + R_2)$.

T_1 et T'_1 sont calculés depuis O_1 . T_2 et T'_2 seront calculés depuis O_2 .

O_1 et O_2 étant connus, on calcule $D_{O_1 O_2}$ et $G_{O_1 O_2}$ puis α par

$$\sin \alpha = \frac{R_2}{IO_2} = \frac{R_1}{IO_1} = \frac{R_1 + R_2}{O_1 O_2}.$$

Les coordonnées de O_1 , O_2 , T_1 et T_2 permettent de calculer les gisements suivants :

$$G_{O_1 T_1} = G_{O_1 O_2} + (100 - \alpha) ;$$

$$G_{O_1 T'_1} = G_{O_1 O_2} - (100 - \alpha) ;$$

$$G_{O_2 T_2} = G_{O_1 T_1} + 200 = G_{O_1 O_2} + 300 - \alpha = G_{O_1 O_2} - (100 + \alpha) ;$$

$$G_{O_2 T'_2} = G_{O_1 T'_1} + 200 = G_{O_1 O_2} + 100 + \alpha.$$

Donc, en simplifiant, on obtient :

T_1	$\begin{cases} X_{O_1} + R_1 \cdot \cos(G_{O_1 O_2} - \alpha) \\ Y_{O_1} - R_1 \cdot \sin(G_{O_1 O_2} - \alpha) \end{cases}$	T_2	$\begin{cases} X_{O_2} - R_2 \cdot \cos(G_{O_1 O_2} - \alpha) \\ Y_{O_2} + R_2 \cdot \sin(G_{O_1 O_2} - \alpha) \end{cases}$
T'_1	$\begin{cases} X_{O_1} - R_1 \cdot \cos(G_{O_1 O_2} + \alpha) \\ Y_{O_1} + R_1 \cdot \sin(G_{O_1 O_2} + \alpha) \end{cases}$	T'_2	$\begin{cases} X_{O_2} + R_2 \cdot \cos(G_{O_1 O_2} + \alpha) \\ Y_{O_2} - R_2 \cdot \sin(G_{O_1 O_2} + \alpha) \end{cases}$

On contrôle les résultats par $G_{T_1 T_2} = G_{O_1 O_2} - \alpha$ et $G_{T'_1 T'_2} = G_{O_1 O_2} + \alpha$.

3.2.2 Tangentes extérieures

On cherche les deux tangentes extérieures communes à deux cercles donnés (fig. 4.13.).

Les données sont O_1 , O_2 , R_1 et R_2 .

Pour que les tangentes existent, il faut que $O_1 O_2 > |R_1 - R_2|$, c'est-à-dire qu'un des deux cercles ne doit pas se trouver à l'intérieur de l'autre.

Le cas limite est que les deux cercles soient tangents ; alors $O_1 O_2 = |R_1 - R_2|$.

T_1 et T'_1 sont calculés depuis O_1 . T_2 et T'_2 seront calculés depuis O_2 .

O_1 et O_2 étant connus, on calcule $D_{O_1 O_2}$ et $G_{O_1 O_2}$. On trace la parallèle à $O_1 O_2$ passant par T_1 et faisant un angle α avec $T_1 T_2$.

On calcule α comme suit : $\sin \alpha = \frac{|R_2 - R_1|}{O_1 O_2}$.

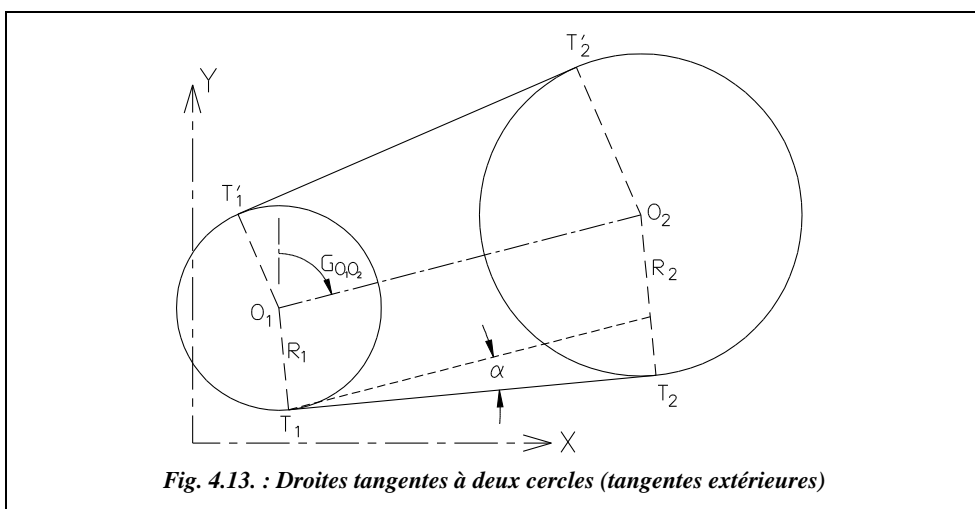
On remarque sur la figure 4.13. que $G_{T_1 T_2} = G_{O_1 O_2} + \alpha$ et que $G_{T'_1 T'_2} = G_{O_1 O_2} - \alpha$.

D'où : $G_{O_1 T_1} = G_{O_2 T_2} = (G_{O_1 O_2} + \alpha) + 100$ et $G_{O_1 T'_1} = G_{O_2 T'_2} = (G_{O_1 O_2} - \alpha) - 100$

Donc, en simplifiant, on obtient :

T_1	$\begin{cases} X_{O1} + R_1 \cdot \cos(G_{O1O2} + \alpha) \\ Y_{O1} - R_1 \cdot \sin(G_{O1O2} + \alpha) \end{cases}$	T_2	$\begin{cases} X_{O2} + R_2 \cdot \cos(G_{O1O2} + \alpha) \\ Y_{O2} - R_2 \cdot \sin(G_{O1O2} + \alpha) \end{cases}$
T'_1	$\begin{cases} X_{O1} - R_1 \cdot \cos(G_{O1O2} - \alpha) \\ Y_{O1} + R_1 \cdot \sin(G_{O1O2} - \alpha) \end{cases}$	T'_2	$\begin{cases} X_{O2} - R_2 \cdot \cos(G_{O1O2} - \alpha) \\ Y_{O2} + R_2 \cdot \sin(G_{O1O2} - \alpha) \end{cases}$

On contrôle les résultats par $G_{T1T2} = G_{O1O2} + \alpha$ et $G_{T'1T'2} = G_{O1O2} - \alpha$.



3.2.3 Application

Trouvez les deux tangentes intérieures et les deux tangentes extérieures communes aux deux cercles suivants :

- cercle de centre $O_1(45,64 ; 55,12)$ et de rayon $R_1 = 10,00$ m.
- cercle de centre $O_2(68,78 ; 44,31)$ et de rayon $R_2 = 12,30$ m.

◆ Résolution graphique



Tracé des deux cercles : commande **CERCLE** de centre $45.64, 55.12$ et de rayon 15 , puis **CERCLE** de centre $68.78, 44.31$ et de rayon 12.3

Tracé des tangentes communes : commande **LIGNE** du point **TANgent** au premier cercle (cliquez vers la zone de tangence choisie) au point **TANgent** au deuxième cercle (cliquez vers la deuxième zone de tangence choisie). Opérez de même pour obtenir les trois autres tangentes.

Lire les résultats : passez en accrochage permanent *INTER*section (menu *OPTIONS / ACCROCHAGE AUX OBJETS...*), puis commande *ID* pour obtenir les coordonnées des huit points cherchés.

Résultats

- Pour les tangentes intérieures :
 T_1 (51.49,47.01) et T_2 (61.59,54.29) ;
 T'_1 (55.61,55.84) et T'_2 (56.51,43.42).
- Pour les tangentes extérieures :
 T_1 (40.61,46.48) et T_2 (62.59,33.68) ; T'_1 (49.04,64.52) et T'_2 (72.96,55.88).

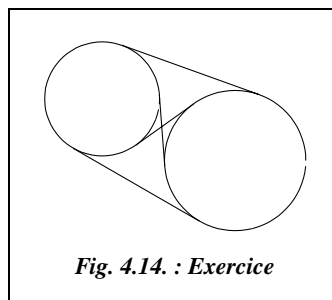


Fig. 4.14. : Exercice

4 INTERSECTION DE DEUX CERCLES

On cherche les points d'intersection de deux cercles (fig. 4.15.). Les données sont O_1 , O_2 , R_1 et R_2 .

Pour qu'il y ait intersection, il faut que (condition d'existence) :

$$\begin{aligned} O_1 O_2 &< R_1 + R_2 \\ O_1 O_2 &> |R_1 - R_2| \end{aligned}$$

Cas particuliers

- Si $O_1 O_2 = R_1 + R_2$, les cercles sont tangents extérieurement.
- Si $O_1 O_2 = |R_1 - R_2|$, les cercles sont tangents intérieurement.

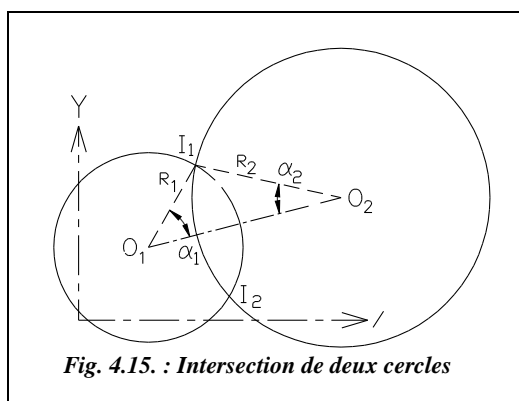


Fig. 4.15. : Intersection de deux cercles

Le **déroulement des calculs** est le suivant : O_1 et O_2 étant connus, on calcule $G_{O_1 O_2}$ et $D_{O_1 O_2}$. On calcule ensuite les angles α_1 et α_2 comme suit :

$$\cos \alpha_1 = \frac{R_1^2 + (O_1 O_2)^2 - R_2^2}{2R_1 \cdot O_1 O_2} \quad \text{et} \quad \cos \alpha_2 = \frac{R_2^2 + (O_1 O_2)^2 - R_1^2}{2R_2 \cdot O_1 O_2}$$

- Si on effectue les calculs à partir de O_1 , on obtient :

$$G_{O_1 I_1} = G_{O_1 O_2} - \alpha_1 \quad \text{et} \quad G_{O_1 I_2} = G_{O_1 O_2} + \alpha_1.$$

Finalement :

$$\begin{array}{l} I_1 \left| \begin{array}{l} X_{O_1} + R_1 \cdot \sin(G_{O_1 O_2} - \alpha_1) \\ Y_{O_1} + R_1 \cdot \cos(G_{O_1 O_2} - \alpha_1) \end{array} \right. \quad I_2 \left| \begin{array}{l} X_{O_1} - R_1 \cdot \sin(G_{O_1 O_2} + \alpha_1) \\ Y_{O_1} + R_1 \cdot \cos(G_{O_1 O_2} + \alpha_1) \end{array} \right. \end{array}$$

Pour vérifier, on peut effectuer les mêmes calculs depuis O_2 ou bien contrôler que $G_{I_1 I_2} = G_{O_1 O_2} + 100$

Application

Trouvez les coordonnées des deux points d'intersection des deux cercles suivants : cercle de centre $O_1 (45,62 ; 33,24)$ et de rayon $R_1 = 17,45$ m, cercle de centre $O_2 (50,13 ; 35,64)$ et de rayon $R_2 = 20,12$ m.

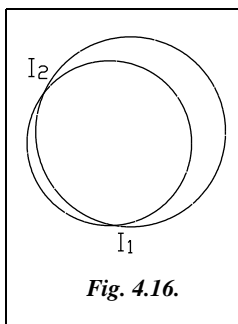


Fig. 4.16.

Résolution graphique



Résolution extrêmement simple dans ce cas puisqu'il suffit de dessiner les deux cercles.

Commande **CERCLE** de centre $45.62,33.24$ et de rayon 17.45 .

Commande **CERCLE** de centre $50.13,35.64$ et de rayon 20.12 .

Commande **ID** pour obtenir les coordonnées des intersections.

Résultats

$I_1 (31.75,43.84)$ et $I_2 (46.66,15.82)$.

5 DÉTERMINATION D'UN CERCLE

5.1 Cercle défini par trois points

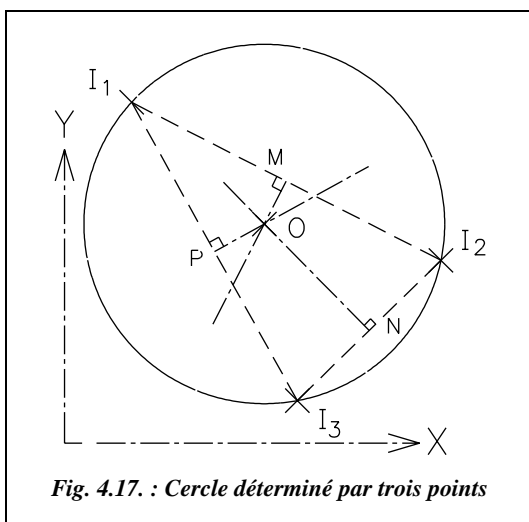


Fig. 4.17. : Cercle déterminé par trois points

On cherche le centre et le rayon du cercle passant par trois points donnés (fig. 4.17.). Les données sont I_1 , I_2 et I_3 .

Les trois médiatrices des trois côtés du triangle inscrit (I_1 - I_2 - I_3) se coupent au centre du cercle O .

On peut, par exemple, calculer l'intersection des médiatrices issues de M et N à partir des formules de Delambre.

Les coordonnées de M , milieu de $I_1 I_2$ et de N , milieu de $I_2 I_3$, sont les suivantes :

$$M \left(\frac{X_{I1} + X_{I2}}{2} ; \frac{Y_{I1} + Y_{I2}}{2} \right) \text{ et } N \left(\frac{X_{I2} + X_{I3}}{2} ; \frac{Y_{I2} + Y_{I3}}{2} \right)$$

Les gisements nécessaires sont : $G_{MO} = G_{II2} + 100$ et $G_{NO} = G_{I2I3} + 100$

Les formules de Delambre donnent X_O et Y_O .

Le rayon se calcule par $R = OI_1 = OI_2 = OI_3$; ce calcul sert également de contrôle.

Application

Donnez les caractéristiques du cercle passant par $I_1(45,34 ; 33,21)$, $I_2(121,54 ; 98,75)$ et $I_3(73,13 ; 144,54)$.



Résolution graphique : elle se résume à l'utilisation de la commande de tracé d'un cercle, option trois points.

Menu DESSIN / CERCLE / Par 3 points, premier point 45.34,33.21↵, deuxième point 121.54,98.75↵, troisième point 73.13,144.54↵. Commande LISTE↵ pour obtenir les caractéristiques du cercle.

Résultats

O (64.98,87.44) et $R = 57.68$ m.

5.2 Cercle défini par deux points et la tangente en un des points

On cherche le centre et le rayon du cercle passant par deux points donnés et tangents à une droite donnée passant par un des deux points (fig. 4.18.). Les données sont I_1 , I_2 et G_T .

La médiatrice de I_1I_2 et la perpendiculaire à la tangente passant par I_2 se coupent au centre du cercle O. On peut, par exemple, calculer l'intersection de ces deux droites à partir des formules de Delambre.

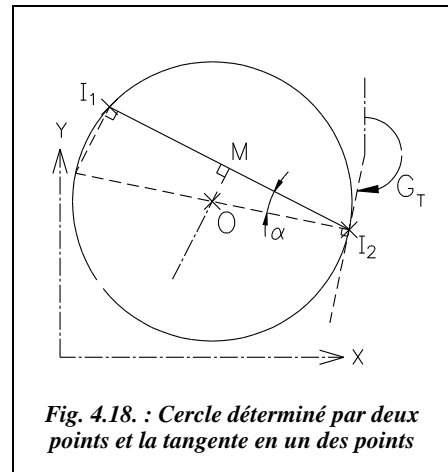


Fig. 4.18. : Cercle déterminé par deux points et la tangente en un des points

Les coordonnées de M, milieu de I_1I_2 sont :

$$M \left(\frac{X_{I1} + X_{I2}}{2} ; \frac{Y_{I1} + Y_{I2}}{2} \right)$$

On a $G_{MO} = G_{II I2} + 100$ et $G_{I2 O} = G_T + 100$.

Les formules de Delambre donnent les coordonnées $(X_O ; Y_O)$. Le rayon R est calculé par $R = I_1 O = I_2 O$.

À titre de **vérification**, ou bien si le rayon R est la seule valeur cherchée, on peut aussi calculer :

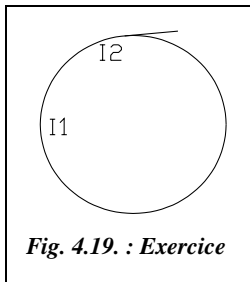
$$\alpha = G_{I2 II} - G_{I2 O} = G_{I2 II} - (G_T + 100) \text{ et en déduire } R = \frac{I_1 I_2}{2 \cos \alpha}.$$

Application

Trouvez les caractéristiques du cercle passant par $I_1 (45,34 ; 33,21)$ et $I_2 (121,54 ; 98,75)$, le gisement de la tangente en I_2 étant $G_T = 94,125$ gon.



Résolution graphique : l'environnement de travail est identique à celui du paragraphe 1.4.



Tracé de la tangente en I_2 : **LIGNE** du point $121.54, 98.75$ au point $@50<94.125$.

Dessin du cercle : menu **DESSIN / CERCLE / Par 3 points**, 1^{er} point $45.34, 33.21$, 2^e point **EXTrémité** de la tangente (point I_2), 3^e point **TANgent** à la tangente.

Commande **LISTE** pour obtenir les caractéristiques du cercle.

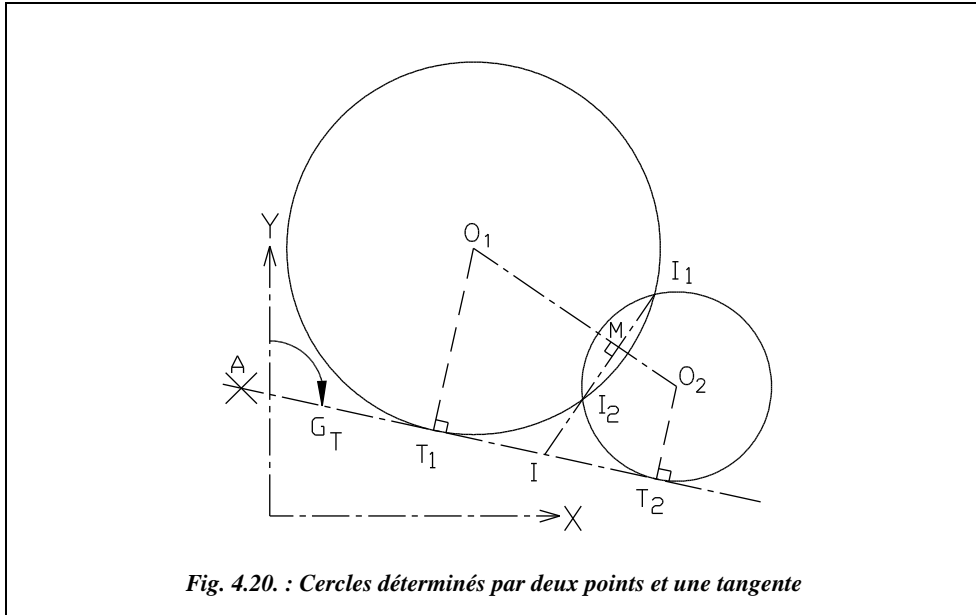
Résultats

O $(129.53, 12.39)$ et $R = 86.73$ m.

5.3 Cercle passant par deux points et tangent à une droite

On cherche les deux cercles tangents à une droite donnée et passant par deux points connus I_1 et I_2 non situés sur cette droite (fig. 4.20.). Les données sont les points A, I_1 , I_2 et le gisement G_T .

Les centres O_1 et O_2 sont calculés par intersection (formules de Delambre) de la médiatrice de I_1I_2 avec les deux perpendiculaires à la tangente issues de T_1 et T_2 .



Les coordonnées de M, milieu de I_1I_2 , sont :

$$M \left(\frac{X_{I1} + X_{I2}}{2} ; \frac{Y_{I1} + Y_{I2}}{2} \right)$$

La droite I_1I_2 étant connue, on peut calculer G_{II2} . Le gisement de la médiatrice O_1O_2 est alors :

$$G_{O1O2} = G_{II2} - 100$$

La puissance du point I (voir chap. 5, §3.4.) par rapport aux deux cercles donne $I I_1 \cdot I I_2 = IT_1^2 = IT_2^2$.

On calcule les coordonnées du point I par intersection de la tangente définie par A et G_T et de la droite (I_1I_2) définie par les deux points I_1 et I_2 (formules de Delambre).

On peut maintenant calculer IT_1 et IT_2 en appliquant $IT_1 = IT_2 = \sqrt{I I_1 \cdot I I_2}$. On peut donc calculer les coordonnées de T_1 et T_2 à partir de celles de I.

Comme $G_{T1O1} = G_{T2O2} = G_T - 100$, les formules de Delambre donnent O_1 et O_2 .

Les rayons R_1 et R_2 sont calculés à partir de $R_1 = O_1T_1$ et $R_2 = O_2T_2$.

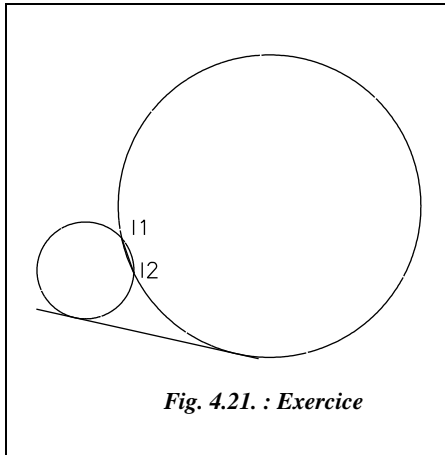
On vérifie que $I_1O_1 = I_2O_1 = R_1$ et $I_1O_2 = I_2O_2 = R_2$.

Application

Calculez les caractéristiques des deux cercles passant par I_1 (612,32 ; 593,48) et I_2 (628,33 ; 547,67) et tangents à la droite passant par A(500 ; 500) et de gisement $G_T = 113,964$ gon.



Résolution graphique



L'environnement de travail est identique à celui du paragraphe 1.4.

Tracez la tangente : *LIGNE* du point 500,500 au point @300<113.964.

Tracez la droite I_1I_2 : *LIGNE* du point 612.32,593.48 au point 628.33,547.67.

CERCLE option *3Points*, premier point *EXTrémité* de... (point I_1), deuxième point *EXTrémité* de... (point I_2), troisième point *TANGent* à la tangente (cliquez vers la zone de tangence souhaitée ; suivant l'endroit où vous cliquez, vous obtiendrez un cercle ou l'autre). Même opération pour le deuxième cercle.

La commande *LISTE* permet d'obtenir les caractéristiques des deux cercles.

Résultats

T_1 (550.626 , 488.714) ; T_2 (763.856 , 441.178) ; I (657.241 , 464.946) ;
 O_1 (564.53 , 551.08), $R_1 = 63.89$ m ; O_2 (807.27 , 635.91), $R_2 = 199.51$ m.

5.4 Cercle donné par un rayon, un point et une tangente

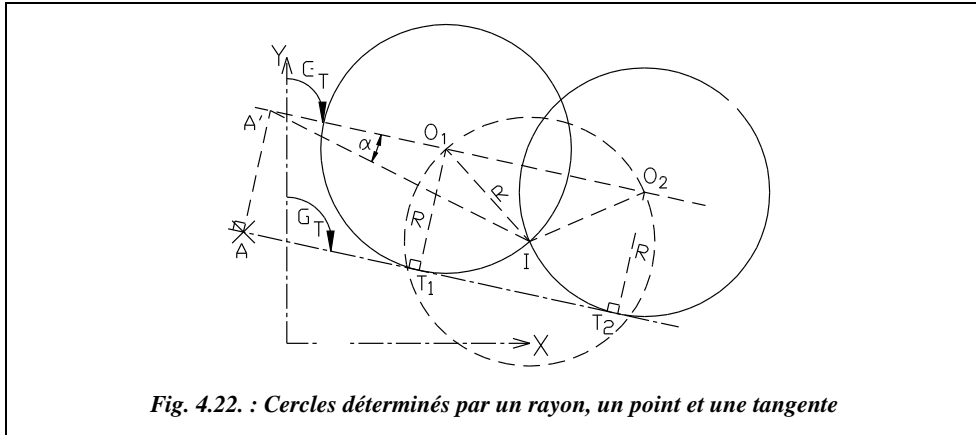
On cherche les deux cercles de même rayon R connu centrés en O_1 et O_2 , passant par le point I et tangents à une droite donnée ne passant pas par I (fig. 4.22.). Les données sont les points I et A , le gisement G_T et le rayon R .

Une solution possible est de remarquer que les centres O_1 et O_2 sont situés à l'intersection du cercle de centre I et de rayon R avec la parallèle à la tangente située à la distance R de cette dernière.

On calcule le point A' par rayonnement depuis le point A , c'est-à-dire :

$$X_{A'} = X_A + R \sin(G_T - 100)$$

$$Y_{A'} = Y_A + R \cos(G_T - 100)$$



Si I est à droite de la tangente, c'est-à-dire $G_{AI} > G_T$, remplacez dans ces formules $(G_T - 100)$ par $(G_T + 100)$.

Les points O_1 et O_2 sont les intersections entre la droite issue de A' et le cercle de centre I et de rayon R .

En posant $\alpha = G_{A'I} - G_T$, on obtient les coordonnées suivants :

$$\begin{aligned} X_{O1} &= X_{A'} + \left[A'I \cdot \cos \alpha - \sqrt{R^2 - (A'I \cdot \sin \alpha)^2} \right] \cdot \sin G_T \\ Y_{O1} &= Y_{A'} + \left[A'I \cdot \cos \alpha - \sqrt{R^2 - (A'I \cdot \sin \alpha)^2} \right] \cdot \cos G_T \\ X_{O2} &= X_{A'} + \left[A'I \cdot \cos \alpha + \sqrt{R^2 - (A'I \cdot \sin \alpha)^2} \right] \cdot \sin G_T \\ Y_{O2} &= Y_{A'} + \left[A'I \cdot \cos \alpha + \sqrt{R^2 - (A'I \cdot \sin \alpha)^2} \right] \cdot \cos G_T \end{aligned}$$

On vérifie que $G_{O1O2} = G_T$ et $IO_1 = IO_2 = R$.

Application

Déterminez les centres des deux cercles de rayon $R = 150,00$ m, passant par I (230,46 ; 152,52), tangents à la droite issue de l'origine et de gisement $G_T = 106,666$ gon.



Résolution graphique

L'environnement graphique est identique à celui du paragraphe 1.4.

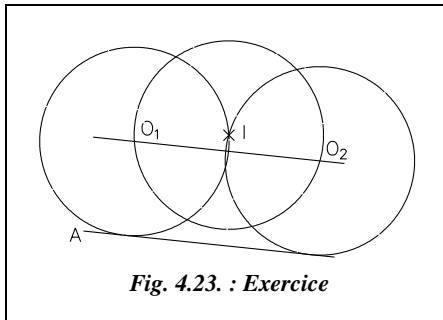


Fig. 4.23. : Exercice

AutoCAD ne possédant pas de fonction de tracé de cercle du type (Point, Tangent, Rayon), il faut avoir recours à une construction intermédiaire.

Tracé de la tangente : **LIGNE** du point O_1 au point $@400<106.666$

Placez le point I : **POINT** 230.46,152.52

Tracé du cercle de centre I et de rayon R : **CERCLE** centre 230.46,152.52 rayon 150

Parallèle à la tangente décalée de R : **DECALER** la tangente par 150 vers : cliquez du côté du point I.

Construction des deux cercles cherchés : **CERCLE** de centre **INT** de ... et de rayon 150

Commande **LISTE** pour obtenir les caractéristiques des deux cercles.

Résultats

O_1 (80.81,142.33) et O_2 (374.73,111.45).

5.5 Cercle défini par son rayon et deux tangentes

C'est le cas de la recherche des cercles permettant de raccorder deux alignements routiers : on connaît le rayon du cercle, choisi en fonction du type de routes à raccorder, et les alignements droits donc leur point d'intersection S ; on cherche la position du centre du raccordement circulaire. Il existe quatre solutions possibles (fig. 4.24.).

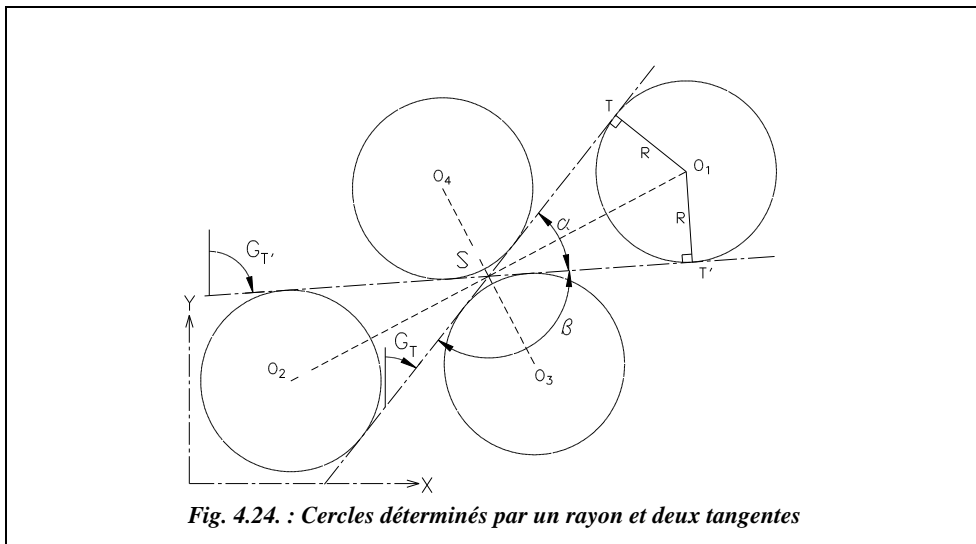


Fig. 4.24. : Cercles déterminés par un rayon et deux tangentes

Les coordonnées de l'intersection S, les gisements G_T et $G_{T'}$, et le rayon R sont donnés.

La démarche de calcul étant la même pour les quatre cercles, il faut calculer d'abord le cercle centré en O_1 , puis en déduire les coordonnées de O_2 , de O_3 et de O_4 .

Connaissant les coordonnées du point S, on peut calculer les coordonnées du centre O_1 depuis ce point. On voit sur la figure 4.24. que :

$$\alpha = G_{T'} - G_T, \quad G_{SO_1} = G_T + \frac{\alpha}{2} = \frac{G_T + G_{T'}}{2} \quad \text{et} \quad G_{SO_2} = 200 + G_{SO_1}$$

Donc, en simplifiant, on obtient :

$$\begin{array}{l} O_1 \left| \begin{array}{l} X_S + \frac{R}{\sin(\alpha/2)} \cdot \sin\left(\frac{G_T + G_{T'}}{2}\right) \\ Y_S + \frac{R}{\sin(\alpha/2)} \cdot \cos\left(\frac{G_T + G_{T'}}{2}\right) \end{array} \right. \quad O_2 \left| \begin{array}{l} X_S + \frac{R}{\sin(\alpha/2)} \cdot \sin\left(\frac{G_T + G_{T'}}{2} + 200\right) \\ Y_S + \frac{R}{\sin(\alpha/2)} \cdot \cos\left(\frac{G_T + G_{T'}}{2} + 200\right) \end{array} \right. \end{array}$$

De même, le calcul de O_3 et O_4 fait appel à l'angle $\beta = 200 - \alpha$, donc :

$$\begin{array}{l} O_3 \left| \begin{array}{l} X_S + \frac{R}{\sin(\beta/2)} \cdot \sin\left(\frac{G_T + G_{T'}}{2} + 100\right) \\ Y_S + \frac{R}{\sin(\beta/2)} \cdot \cos\left(\frac{G_T + G_{T'}}{2} + 100\right) \end{array} \right. \quad O_4 \left| \begin{array}{l} X_S + \frac{R}{\sin(\beta/2)} \cdot \sin\left(\frac{G_T + G_{T'}}{2} + 300\right) \\ Y_S + \frac{R}{\sin(\beta/2)} \cdot \cos\left(\frac{G_T + G_{T'}}{2} + 300\right) \end{array} \right. \end{array}$$

Pour vérifier, on peut calculer les coordonnées de T (ou T'), avec $ST = R/\tan(\alpha/2)$ et contrôler que $O_1T = R$.

Application

Trouver les centres des quatre cercles de rayon 150,00 m, tangents aux deux droites suivantes : sommet S (380,22 ; 505,86), gisements 42,724 gon et 95,620 gon.



Résolution graphique (fig. 4.24.)

Environnement graphique : voir § 1.4.

Tracé des tangentes : *LIGNE* du point 380.22,505.86↵ au point @400<42.724↵, *LIGNE*↵ du point S (*EXTrémité* de) au point @400<95.620↵, *LIGNE*↵ du point S au point @-400<42.724↵, *LIGNE*↵ du point S au point @-400<95.620↵.

Tracé des cercles : menu *DESSIN / CERCLE / TANGENT, TANGENT, RAYON*. Cliquez ensuite les zones de tangence et donnez le rayon : 150.

Les caractéristiques des cercles s'obtiennent avec la commande *LISTE* (ou encore *ID* CENTRE du cercle).

Résultats

$O_1(709.15, 678.89)$, $O_2(51.29, 332.84)$, $O_3(456.54, 360.77)$, $O_4(303.89, 650.96)$.

5.6 Cercle défini par un point et deux tangentes

C'est un cas pratiquement identique à celui du paragraphe précédent, sauf que le rayon est inconnu mais on impose un point de passage fixe P appelé « point obligé », un passage à niveau par exemple. Les données sont les coordonnées des points S et P, les gisements G_T et $G_{T'}$ (fig. 4.25.).

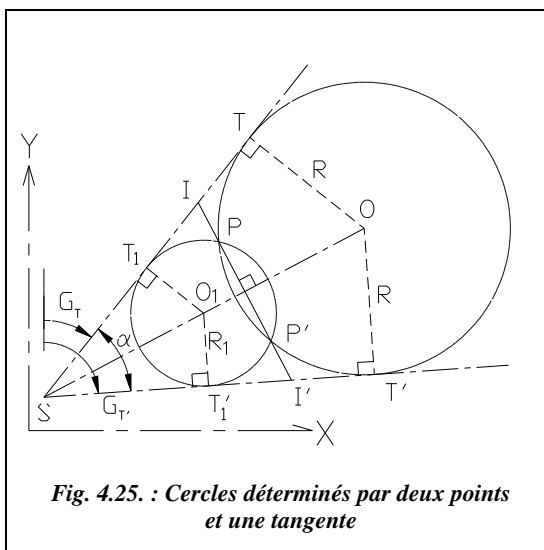


Fig. 4.25. : Cercles déterminés par deux points et une tangente

Il existe deux cercles passant par le point P et tangents à ST et ST' : le cercle centré en O_1 et celui centré en O.

Ils définissent deux points d'intersection P et P' symétriques par rapport à la droite SO. Le calcul des rayons et des centres se fait à partir des points T et T_1 , eux-mêmes déterminés à partir des points I et I'.

Les coordonnées du point I, intersection des droites ST et PP', sont calculées par les formules de Delambre :

- droite ST passant par le point S et de gisement G_T ;

- droite PP' passant par le point P et de gisement $(G_T + G_{T'})/2 + 100$.

On effectue le même calcul des coordonnées du point I', intersection des droites ST' et PP'. La puissance du point I par rapport aux deux cercles est $IP \cdot IP' = (IT)^2 = (IT_1)^2$.

Comme $IP = I'P'$, on a : $IP' = I'P$. On en déduit IT et IT_1 qui permettent de calculer les coordonnées des points T et T_1 à partir du point I.

Alors, $R = ST \cdot \tan(\alpha/2)$ et $R_1 = ST_1 \cdot \tan(\alpha/2)$, avec $\alpha = G_{T'} - G_T$.

On est ramené au cas du paragraphe précédent où l'on connaissait le rayon du cercle.

Application

Trouvez les cercles passant par P (200,00 ; 122,00) et tangents aux droites suivantes :

- droite passant par S (50,00 ; 50,00) et de gisement 20,050 gon ;
- droite passant par S et de gisement 135,130 gon.



Résolution graphique

AutoCAD LT

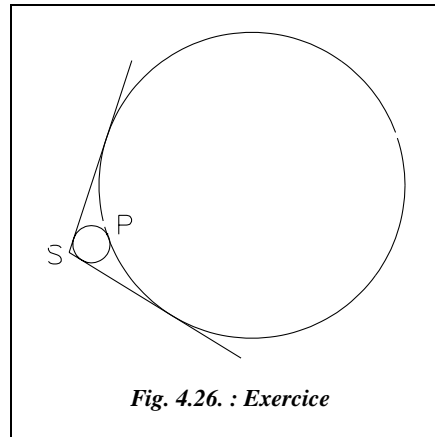
Environnement de travail identique à celui du paragraphe 1.4.

Dessin des droites : **LIGNE** du point 50,50 au point @800<20.050. **LIGNE** du point **EXTrémité** de... (point S) au point @800<135.130.

Placez le point P : **POINT** 200,122.

Dessin du premier cercle : commande **CERCLE**, option **3 Points**, premier point **TANGent** à la première droite, deuxième point **TANGent** à la deuxième droite, troisième point **NODal** de... (point P).

Dessin du deuxième cercle : même chose en cliquant les zones de tangence pour définir le deuxième cercle. Caractéristiques des cercles avec la commande **LISTE**.



Résultats

O (137.97, 82.31), $R = 73.64$ m ; O₁ (774.59m, 316.15m), $R_1 = 606.51$ m.

5.7 Cercle défini par trois tangentes

On cherche le cercle tangent à trois droites données (fig. 4.27.). Il faut être attentif à l'orientation des tangentes suivant le quadrant du point de tangence. Les données sont les trois droites définies respectivement par les coordonnées de trois points A, B et C et les gisements des trois directions G_A , G_B et G_C .

Le centre du cercle se trouve à l'intersection des bissectrices MO, NO et PO. Il sera déterminé à partir des points M, N ou P, eux-mêmes déterminés par l'intersection (formules de Delambre) des droites données.

Par exemple, il sera déterminé à partir des points M et N, eux-mêmes déterminés par l'intersection :

- des droites AM et CM pour le point M ;
- des droites AN et BN pour le point N.

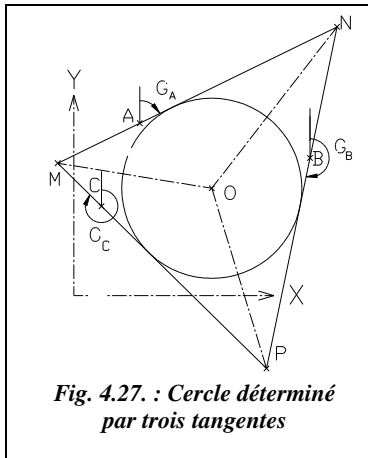


Fig. 4.27. : Cercle déterminé par trois tangentes

Le point O est déterminé par intersection des droites MO et NO définies par :

- les points M et N maintenant connus.
- les gisements de MO et NO :

$$G_{MO} = \frac{G_C - 200 + G_A}{2}$$

$$G_{NO} = \frac{G_A + 200 + G_B}{2}$$

On vérifie en calculant de O à partir de N et P ou bien à partir de M et P.

Application

Trouvez le cercle tangent aux trois droites suivantes :

A (20 ; 50), $G_A = 78$ gon ;

B (60 ; 40), $G_B = 206$ gon ;

C (10 ; 30), $G_C = 353$ gon.



Résolution graphique

L'environnement de travail est identique à celui du paragraphe 1.4.

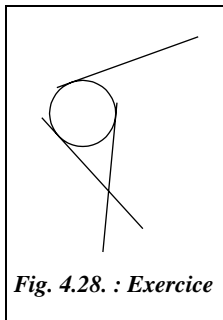


Fig. 4.28. : Exercice

Dessin des droites : **LIGNE** du point 20,50 au point @100<78 du point 60,40 au point @100<206 du point 10,30 au point @100<353.

Dessin du cercle : **CERCLE** option 3 Points, 1^{er} point **TANgent** à la 1^{re} droite, 2^e point **TANgent** à la 2^e droite, 3^e point **TANgent** à la 3^e droite.

Les caractéristiques du cercle sont obtenues avec la commande **LISTE**.

Résultats

O (37.21, 32.80) ; $R = 22.01$ m.

5.8 Cercle défini par son rayon et deux points

On cherche les deux cercles de rayon R connu passant par deux points A et B donnés (fig. 4.29.). Les données sont les coordonnées des deux points A, B et le rayon R .

Les coordonnées des points O et O₁ sont déterminées depuis M, milieu de A et B.

A et B étant connus, on calcule G_{AB} et D_{AB} .

Les coordonnées de M sont :

$$M = \left(\frac{X_A + X_B}{2}, \frac{Y_A + Y_B}{2} \right)$$

Les gisements de MO et MO₁ sont : $G_{MO} = G_{AB} + 100$

$$G_{MO_1} = G_{AB} - 100$$

Les distances MO ou MO₁ sont :

$$D_{MO} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{D_{AB}}{2} \right)^2}$$

Finalement :

$O \left \begin{array}{l} \frac{X_A + X_B}{2} + \sqrt{R^2 - \frac{D_{AB}^2}{4}} \cdot \sin(G_{AB} + 100) \\ \frac{Y_A + Y_B}{2} + \sqrt{R^2 - \frac{D_{AB}^2}{4}} \cdot \cos(G_{AB} + 100) \end{array} \right.$	$O_1 \left \begin{array}{l} \frac{X_A + X_B}{2} + \sqrt{R^2 - \frac{D_{AB}^2}{4}} \cdot \sin(G_{AB} - 100) \\ \frac{Y_A + Y_B}{2} + \sqrt{R^2 - \frac{D_{AB}^2}{4}} \cdot \cos(G_{AB} - 100) \end{array} \right.$
--	--

On vérifie que $OA = OB = O_1A = O_1B = R$.

Application

Voir l'exercice d'application du paragraphe suivant.

5.9 Cercle défini par deux points et une flèche

On cherche les deux cercles passant par deux points A et B donnés et dont on connaît la flèche par rapport à la corde AB (fig. 4.30.).

Les données sont les coordonnées des deux points A, B et la flèche $f = MN$.

On revient au cas précédent en remarquant que dans le triangle AMO :

$$R^2 = (R - f)^2 + \left(\frac{AB}{2} \right)^2 \quad \text{d'où} \quad R = \frac{f^2 + \frac{AB^2}{4}}{2f}$$

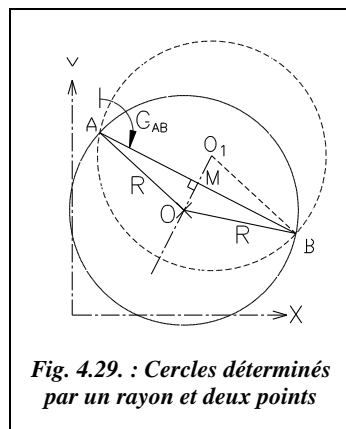


Fig. 4.29. : Cercles déterminés par un rayon et deux points

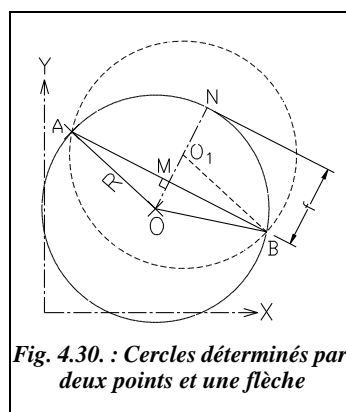


Fig. 4.30. : Cercles déterminés par deux points et une flèche

Application

Trouvez les cercles passant par B (202,78 ; 136,89) et A (245,56 ; 123,32), dont la flèche (entre cercle et corde AB) a pour valeur 28,87 m.



Résolution graphique

AutoCAD LT

Nous envisagerons les deux cas de figure suivants :

1 - On connaît la flèche $f = 28,87$ m (fig. 4.31.).

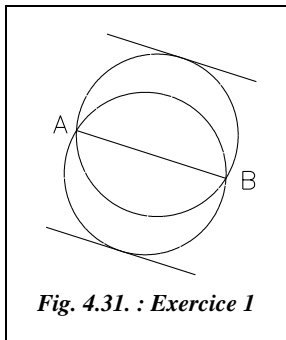


Fig. 4.31. : Exercice 1

Dessin de la droite AB : *LIGNE* du point 245.56,123.32 au point 202.78,136.89.

Construction de la flèche : *DECALER* par 28.87 la droite AB, une fois vers le haut, une fois vers le bas.

Dessin des cercles : *CERCLE* option 3 points, premier point *EXTrémité* de... (point A), deuxième point *EXTrémité* de... (point B), troisième point *TANgent* à la droite inférieure décalée depuis AB. Même opération pour le second cercle.

Les caractéristiques des cercles s'obtiennent avec la commande *LISTE*.

2 - On connaît le rayon $R = 23,16$ m (fig. 4.32.)

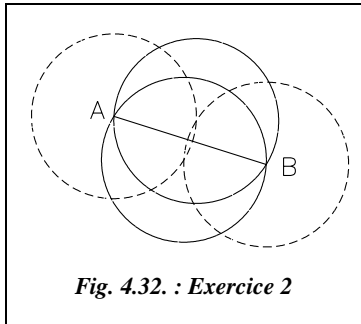


Fig. 4.32. : Exercice 2

Dessin de la droite AB : voir plus haut.

CERCLE de centre *EXTrémité* de... (point A) et de rayon 23.16.

CERCLE de centre *EXTrémité* de... (point B) et de rayon 23.16.

On obtient les deux centres O et O₁ à l'intersection des deux cercles précédemment tracés.

Dessin des cercles cherchés : *CERCLE* de centre *INTersection* de... et de rayon 23.16.

Résultats

O (222.44, 124.66), O₁ (225.90, 135.55), $R = 23.16$ m.

6 POINT DÉTERMINÉ PAR RELÈVEMENT

6.1 Définition

Un point relevé M est un point stationné depuis lequel on vise plusieurs points connus (points d'appui du relèvement, soit A , B et C sur la figure 4.33.). Le but est de déterminer les coordonnées du point M stationné. L'intérêt principal de cette technique est d'obtenir ces coordonnées en effectuant une seule station et uniquement avec des mesures angulaires ; pour être plus précises, les visées doivent être éloignées (voir chap. 1, § 6.).

L'opérateur stationne donc au point M puis effectue un tour d'horizon sur les points A , B et C ; après réduction du tour d'horizon, on connaît les angles H_{zAB} et H_{zAC} .

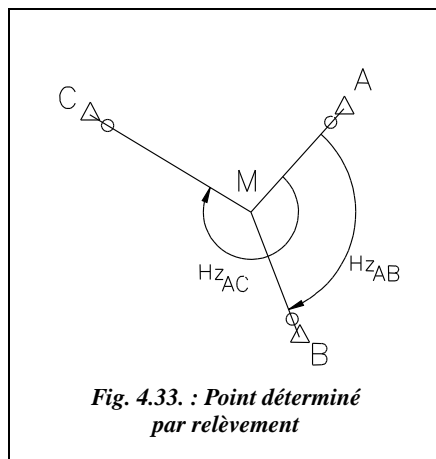


Fig. 4.33. : Point déterminé par relèvement

6.2 Détermination d'un point relevé M

6.2.1 Arc capable associé à l'angle H_{zAB}

À partir d'un triplet de points A , B et M , on peut définir un cercle unique passant par ces trois points. Tout point M de l'arc AB (en trait continu sur la figure 4.34.) est tel que l'angle AMB est constant. Cet arc est appelé arc capable du segment AB associé à l'angle H_{zAB} ; il correspond aux différents lieux possibles du point M .

La partie du cercle dessinée en pointillé est associée à un angle de $(200 - H_{zAB})$.

Donc si l'on veut déterminer complètement les coordonnées du point M , il faut au moins un autre point d'appui C pour construire un deuxième arc capable dont l'intersection avec le premier donne un point M unique.

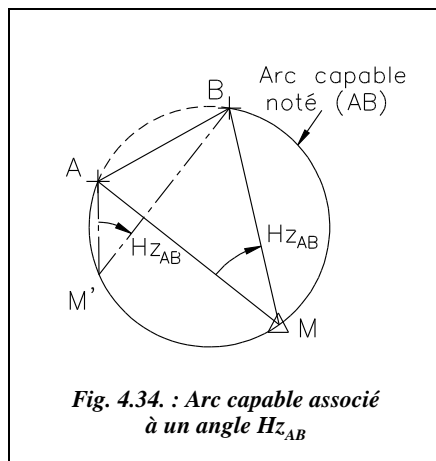


Fig. 4.34. : Arc capable associé à un angle H_{zAB}

6.2.2

Coordonnées du point M par les formules de Delambre

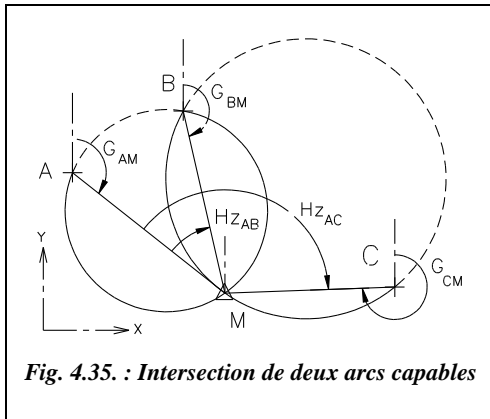


Fig. 4.35. : Intersection de deux arcs capables

Sur la figure 4.35., on constate que l'on peut calculer le point M par intersection à partir de deux des trois visées sur A, B et C.

C'est pourquoi il est possible d'utiliser les formules de Delambre dans lesquelles les gisements des différentes visées seront remplacés par les angles $H_{Z_{AB}}$ et $H_{Z_{AC}}$ du tour d'horizon.

Pour établir les relations entre G_{AM} , G_{BM} , G_{CM} , $H_{Z_{AB}}$ et $H_{Z_{AC}}$, on peut écrire autour du point M que $G_{BM} = G_{AM} + H_{Z_{AB}}$ et $G_{CM} = G_{AM} + H_{Z_{AC}}$

Les formules de Delambre donnent :

$$(Y_M - Y_A)(\tan G_{BM} - \tan G_{AM}) = (X_B - X_A) - (Y_B - Y_A) \cdot \tan G_{BM} \quad (1)$$

$$(Y_M - Y_A)(\tan G_{CM} - \tan G_{AM}) = (X_C - X_A) - (Y_C - Y_A) \cdot \tan G_{CM} \quad (2)$$

La suite de la démonstration doit permettre de calculer $\tan G_{AM}$, $\tan G_{BM}$ et $\tan G_{CM}$ en fonction des données A, B, C, $H_{Z_{AB}}$ et $H_{Z_{AC}}$.

$$\tan G_{BM} - \tan G_{AM} = \frac{\sin G_{BM}}{\cos G_{BM}} - \frac{\sin G_{AM}}{\cos G_{AM}} = \frac{\sin G_{BM} \cdot \cos G_{AM} - \cos G_{BM} \cdot \sin G_{AM}}{\cos G_{AM} \cdot \cos G_{BM}}$$

$$\text{donc } \tan G_{BM} - \tan G_{AM} = \frac{\sin(G_{BM} - G_{AM})}{\cos G_{AM} \cdot \cos G_{BM}} = \frac{\sin H_{Z_{AB}}}{\cos G_{AM} \cdot \cos G_{BM}} \quad (3)$$

$$\text{de même } \tan G_{CM} - \tan G_{AM} = \frac{\sin H_{Z_{AC}}}{\cos G_{AM} \cdot \cos G_{CM}} \quad (4)$$

En éliminant $(Y_M - Y_A)$ dans les équations (1) et (2) et en y reportant les résultats des équations (3) et (4), on obtient l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} [(X_B - X_A) - (Y_B - Y_A) \cdot \tan G_{BM}] \cdot \frac{\cos G_{AM} \cdot \cos G_{BM}}{\sin H_{Z_{AB}}} \\ = [(X_C - X_A) - (Y_C - Y_A) \cdot \tan G_{CM}] \cdot \frac{\cos G_{AM} \cdot \cos G_{CM}}{\sin H_{Z_{AC}}} \end{aligned}$$

En distribuant et en simplifiant, on obtient :

$$\frac{(X_B - X_A) \cdot \cos G_{BM} - (Y_B - Y_A) \cdot \sin G_{BM}}{\sin H_{Z_{AB}}} = \frac{(X_C - X_A) \cdot \cos G_{CM} - (Y_C - Y_A) \cdot \sin G_{CM}}{\sin H_{Z_{AC}}} \quad (5)$$

Les relations trigonométriques $\sin(a + b)$ et $\cos(a + b)$ donnent :

$$\cos G_{BM} = \cos(G_{AM} + Hz_{AB}) = \cos G_{AM} \cdot \cos Hz_{AB} - \sin G_{AM} \cdot \sin Hz_{AB}$$

$$\cos G_{CM} = \cos(G_{AM} + Hz_{AC}) = \cos G_{AM} \cdot \cos Hz_{AC} - \sin G_{AM} \cdot \sin Hz_{AC}$$

$$\sin G_{BM} = \sin(G_{AM} + Hz_{AB}) = \sin G_{AM} \cdot \cos Hz_{AB} + \cos G_{AM} \cdot \sin Hz_{AB}$$

$$\sin G_{CM} = \sin(G_{AM} + Hz_{AC}) = \sin G_{AM} \cdot \cos Hz_{AC} + \cos G_{AM} \cdot \sin Hz_{AC}$$

On reporte ceci dans l'équation (5) dont on divise ensuite chaque membre par $\sin G_{AM}$.
Par suite, il vient :

$$\tan G_{AM} = \frac{(X_B - X_A) \cdot \cotan Hz_{AB} - (X_C - X_A) \cdot \cotan Hz_{AC} + (Y_C - Y_B)}{(Y_B - Y_A) \cdot \cotan Hz_{AB} - (Y_C - Y_A) \cdot \cotan Hz_{AC} - (X_C - X_B)}$$

$$\tan G_{BM} = \tan(G_{AM} + Hz_{AB}) = \frac{\tan G_{AM} + \tan Hz_{AB}}{1 - \tan G_{AM} \cdot \tan Hz_{AB}}$$

Il reste à reporter ces résultats dans les formules de Delambre établie pour l'intersection afin d'obtenir Y_M puis X_M .

Remarque

- Il n'est pas nécessaire de calculer les gisements G_{AM} et G_{BM} puisqu'ils interviennent dans les formules de Delambre par leur tangente $\tan G_{AM}$ et $\tan G_{BM}$. On peut donc se contenter de garder la valeur des tangentes.
- Comme les formules de Delambre pour l'intersection, ces formules présentent des problèmes de définition à cause des tangentes et des cotangentes utilisées.
 - Les problèmes particuliers aux formules de l'intersection ont été traités au paragraphe 1.2. de ce chapitre.
 - Les problèmes particuliers aux formules de relèvement sont les suivants : si Hz_{AB} ou Hz_{AC} valent 0 ou 200 gon, c'est-à-dire lorsque deux points anciens se trouvent alignés avec le point M, la formule précédemment démontrée est alors inutilisable. Toutefois ce cas est rare dans la réalité.

Application

Trouver la formule donnant $\tan G_{AM}$ dans le cas où A, C et M sont alignés.

Réponse

L'équation (2) donne $\tan G_{AM} = \tan G_{CM} = (X_C - X_A)/(Y_C - Y_A)$.

Puis $\tan G_{BM} = \tan(G_{AM} + Hz_{AB}) = (\tan G_{AM} + \tan Hz_{AB})/(1 - \tan G_{AM} \cdot \tan Hz_{AB})$.

Il ne reste plus qu'à appliquer les formules d'intersection.

6.3 Exemple

Calculez les coordonnées du point relevé M depuis lequel on a visé les points A, B et C donnés ci-contre.

Point	X (m)	Y (m)	H _z (gon)
A	123,45	32,26	0,0000
B	46,34	227,75	109,3821
C	354,14	189,98	260,5907

Réponse

$\tan G_{AM} = 0,424499$; $\tan G_{BM} = -1,635370$; $X_M = 173,44$ m et $Y_M = 150,03$ m.

6.4 Construction graphique d'un point relevé



On utilise la propriété abordée au paragraphe 6.2.1. : l'angle entre la tangente au cercle en A (ou la tangente au cercle en B) et la corde AB est égal à l'angle $H_{z_{AB}}$ (soit 109,3821 gon). On en déduit le cercle C1 passant par A, B et M (fig. 4.36.).

De même, l'angle entre la corde BC et la tangente au cercle en B (ou en C) est égal à $H_{z_{BC}}$ (soit $260,5907 - 109,3821 = 151,2086$ gon). On en déduit le cercle C2 passant par les points B, C et M. Le point M est à l'intersection des deux cercles.

L'environnement de travail à celui du paragraphe 1.4.

1 - Dessin des cordes AB et BC :

LIGNE↵ du point 123.45,32.26↵ au point 46.34,227.75↵ au point 354.14,189.98↵↵

2 - Médiannes de AB et BC :

ROTATION↵ de chaque segment (AB puis BC) autour de **MILieu** de... et d'un angle de 100 gon.

3 - Dessin de la perpendiculaire à la tangente en A au 1^{er} cercle passant par A, B et M : Dessinez à nouveau la corde AB puis **ROTATION**↵ autour du point A d'un angle de -9.3821 ↵ ($-109.3821 + 100$).

4 - Dessin de la perpendiculaire à la tangente en C au 2^e cercle passant par C, B et M : Dessiner à nouveau la corde BC puis **ROTATION**↵ autour du point C d'un angle de 51.2086 ↵ ($151.2086 - 100$).

5 - Construction du cercle passant par A, B et M :

Le centre est à l'intersection de la médiatrice de AB et de la perpendiculaire à la tangente au cercle en A. Si ces deux droites ne se coupent pas, commande **CHNFREIN**↵ (chan-frein) pour obtenir le centre.

CERCLE↵ de centre **INTersection** de... et de rayon **NODal** de.. (point A ou B).

6 - Construction du cercle passant par B, C et M : même méthode.

L'intersection des deux cercles donne le point M dont on lit les coordonnées au moyen de la commande **ID**↵.

Remarques

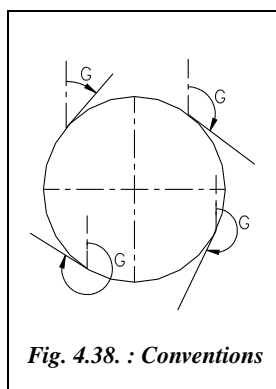
- On peut choisir d'autres couples de points pour construire M (AB et AC ou bien BC et AC) ; le résultat est rigoureusement identique.
- **Attention** : la première construction graphique permet de tracer deux arcs capables symétriques par rapport à la corde AB ; il faut choisir le bon en vérifiant que l'angle AMB est l'angle lu $H_{z_{AB}}$. Si l'on fait l'erreur lors de cette construction, on peut rétablir simplement la situation en faisant un *MIROIR* du cercle dessiné par rapport à la corde.
- Cas particulier : si l'angle $H_{z_{AB}}$ vaut 100 gon, c'est que AB est le diamètre de l'arc capable.

7

PROGRAMMATION EN BASIC STANDARD



Le programme INTERS.BAS fourni sur le disque compact constitue un ensemble de plusieurs sous-programmes traitant tous les cas de figure possibles traités dans ce chapitre : les intersections de droites et de cercles, les points de tangence cercle-droite, les définitions d'un cercle ainsi que le calcul d'un point déterminé par relèvement.



Ils ont été regroupés de manière à utiliser les mêmes sous-programmes (entrée des données, distances, gisement, Delambre) et ainsi gagner de la place en mémoire sur la calculatrice.

Remarques

Pour comprendre les données demandées et suivre les calculs proposés, reportez-vous aux figures de ce chapitre.

Pour ne pas augmenter encore la taille de ce programme, les différents cas de position des tangentes n'ont pas été traités. Il appartient à l'utilisateur d'entrer la « bonne valeur » en tenant compte de la position du point de tangence (fig. 4.38.) :

- point de tangence dans le premier quadrant du cercle : valeur située entre 100 et 200 gon.
- point de tangence dans le deuxième quadrant : valeur située entre 200 et 300 gon.
- point de tangence dans le troisième quadrant : valeur située entre 300 et 400 gon.
- point de tangence dans le quatrième quadrant : valeur inférieure à 100 gon.